Capítulo 5: Análisis en el dominio temporal

carlos.platero@upm.es (C-305)

Análisis en el dominio temporal

- Objetivos:
  1. La distinción entre la respuesta transitoria y la permanente,
  2. Las señales de prueba.
  3. La influencia de la ubicación de los polos del polinomio característico con la respuesta del régimen transitorio.

- Respuesta temporal de un sistema LTI: respuesta transitoria y en régimen permanente

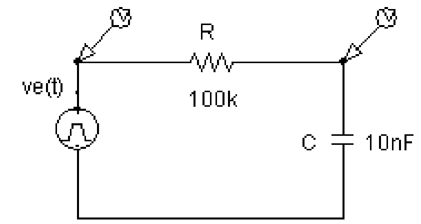
$$y(t) = y_{rt}(t) + y_{rp}(t)$$

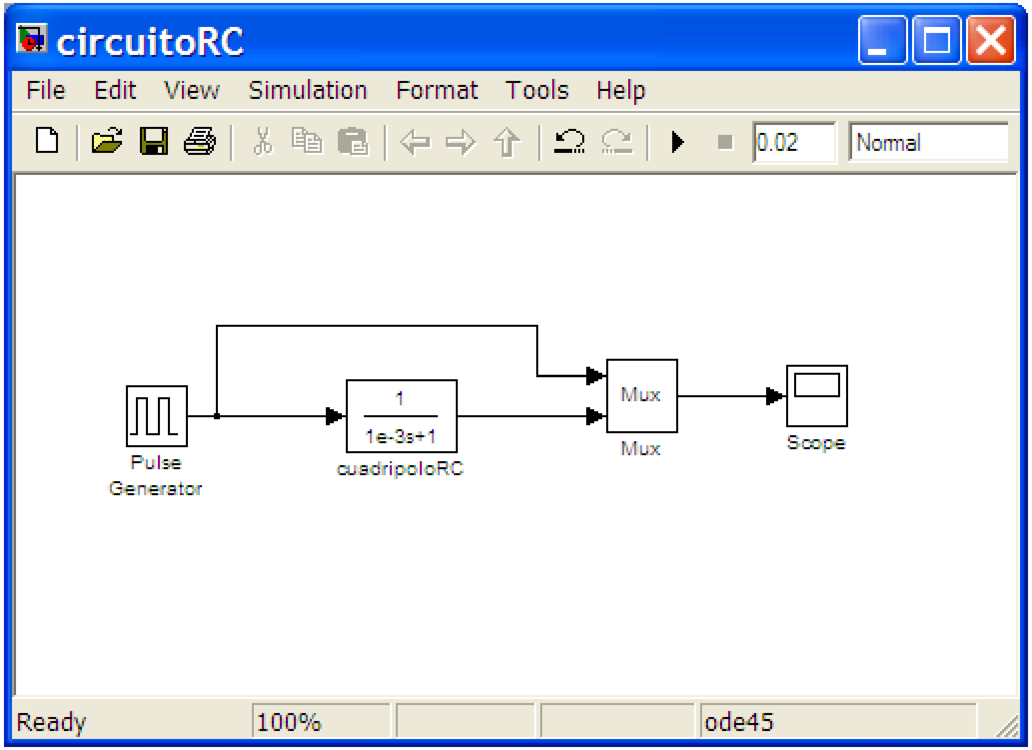
  - Solución de la homogénea y de la particular

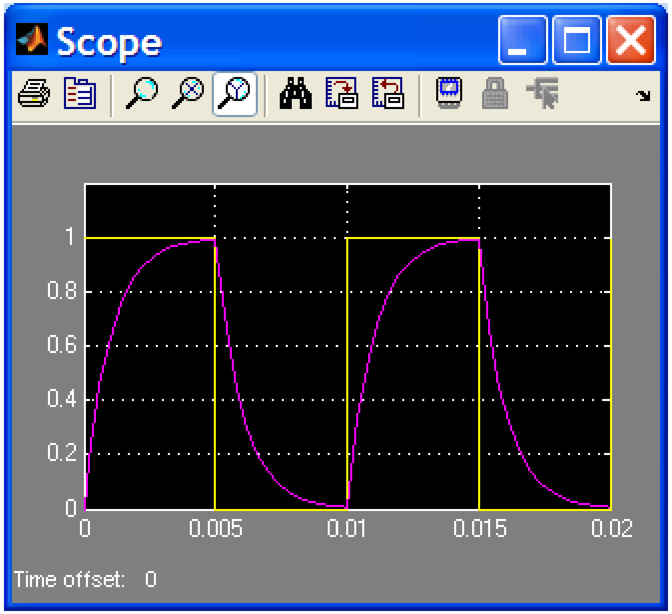
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_{rp}(t) = y_{ss}(t) \qquad \lim_{t\to\infty} y_{rt}(t) = 0$$

Respuesta transitoria y permanente

- Transitorio: rapidez y amortiguamiento
- Permanente: estabilidad y precisión

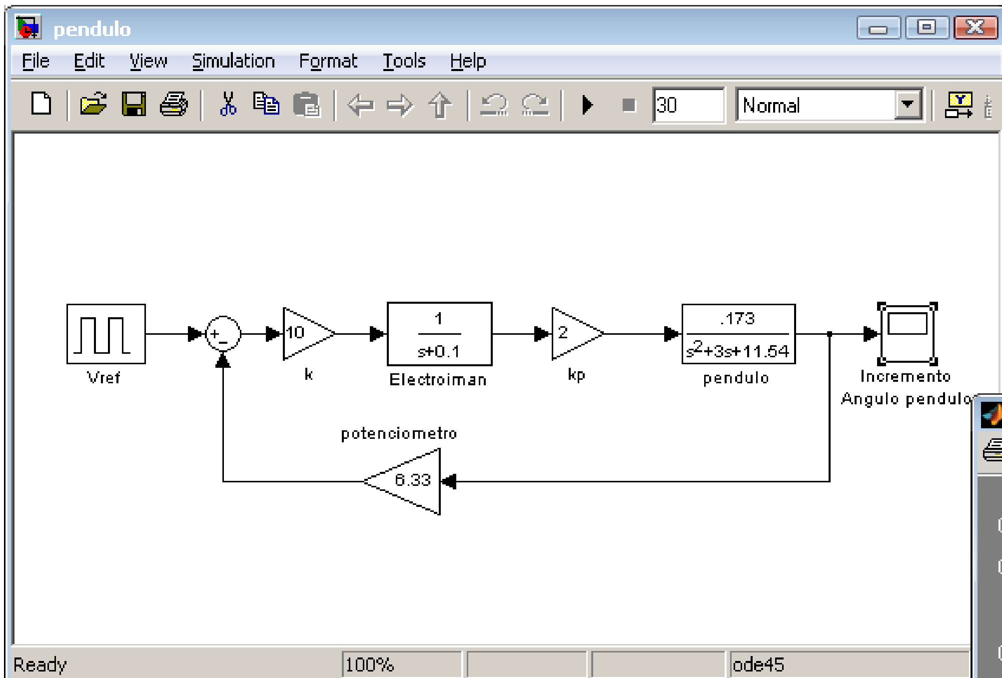


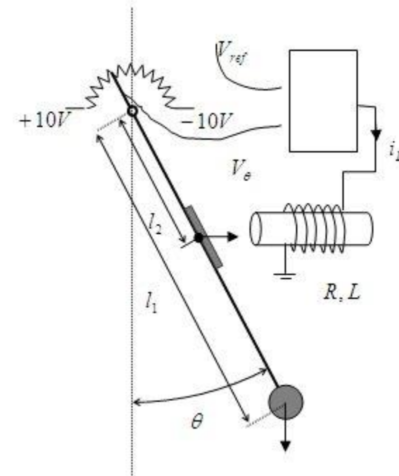




Respuesta transitoria y permanente

- Transitorio: rapidez y amortiguamiento
- Permanente: estabilidad y precisión





Datos:

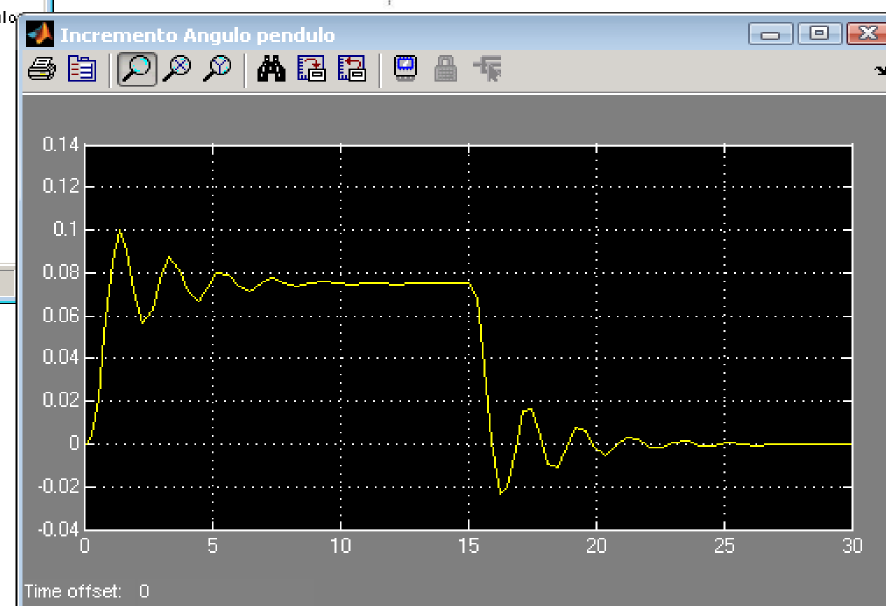
$l_1 = 1m.$

$l_2 = 0{,}2m.$

$L = 1H$

$R = 0{,}1\Omega$

$M = 1Kg.$



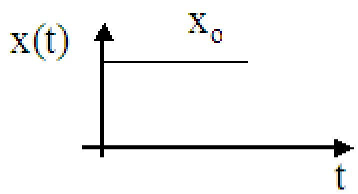
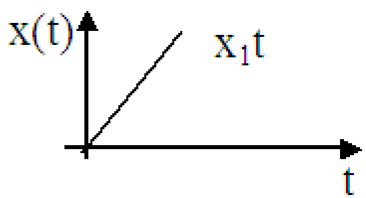
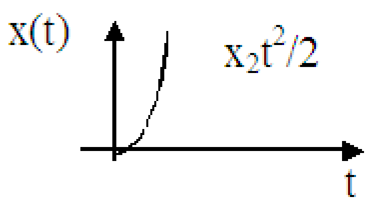
Señales de prueba (1/2)

- Normalmente, las entradas a las que van a ser sometidos los sistemas de control no se conoce con anticipación.
- Éstas pueden ser representadas mediante el truncamiento de la serie de Taylor para los términos superiores a segundo grado:

$$x(t) \cong x_0 + x_1 t + x_2 \frac{t^2}{2}$$

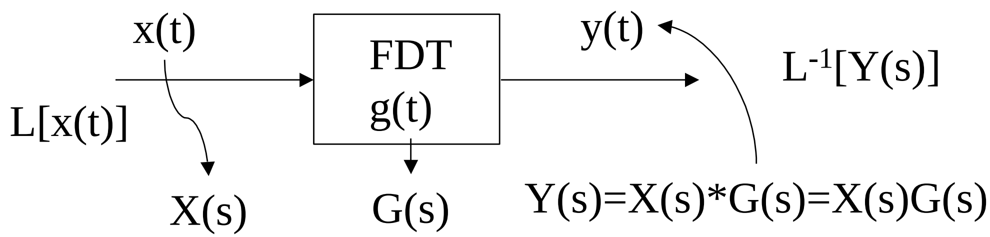
- Cuando el sistema es LTI y por aplicación del teorema de superposición, la respuesta ante una entrada compleja puede ser descompuesta en aquellas debidas a las señales de pruebas simples.

Señales de prueba (2/2)

Gráfica	modelo temporal	Transformada de Laplace
	$x(t)=\begin{cases} x_0 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_0}{s}$
	$x(t)=\begin{cases} x_1 t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_1}{s^2}$
	$x(t)=\begin{cases} x_2\dfrac{t^2}{2} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$x(s)=\dfrac{x_2}{s^3}$

Polinomio característico

Sea un sistema LTI cualquiera ante una entrada en escalón unitario.

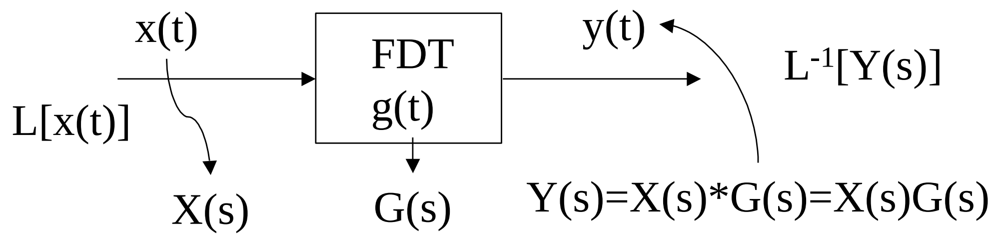


$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} \qquad n \geq m$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + p_i} + \sum_j \frac{k_j s + L_j}{s^2 + 2\alpha_j s + \omega_{n,j}{}^2}$$

$$y(t) = k_1 + \sum_i k_i e^{-p_i t} + \sum_j L_j M_j e^{-\alpha_j t} sen\left(\sqrt{\omega_{n,j}{}^2 - \alpha_j} \cdot t + \vartheta_j \right)$$

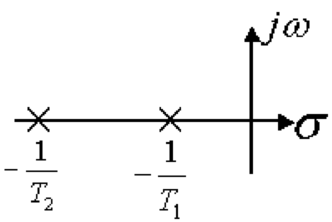
Respuesta temporal dependiendo de los polos (1/3)

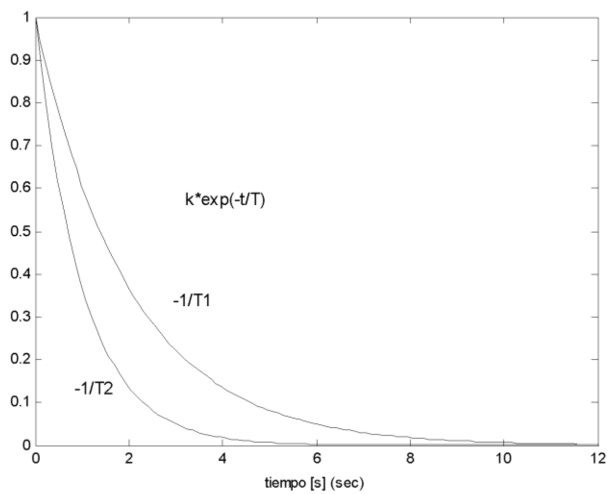


$$Y(s)=\frac{k_1}{s}+\sum_i \frac{k_i}{s+p_i}+\sum_j \frac{k_j s+L_j}{s^2+2\alpha_j s+\omega_{n,j}^{\;2}}$$

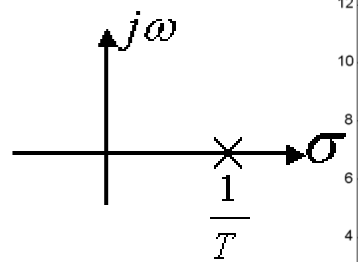
$$y(t)=k_1+\sum_i k_i e^{-p_i t}+\sum_j L_j M_j e^{-\alpha_j t} sen\left(\sqrt{\omega_{n,j}^{\;2}-\alpha_j}\cdot t+\vartheta_j\right)$$

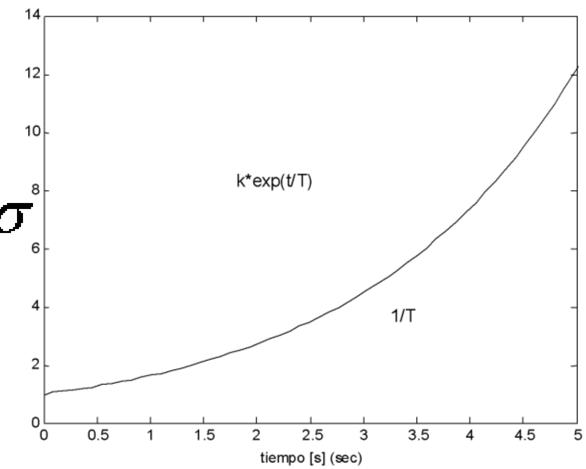
ESTABLE



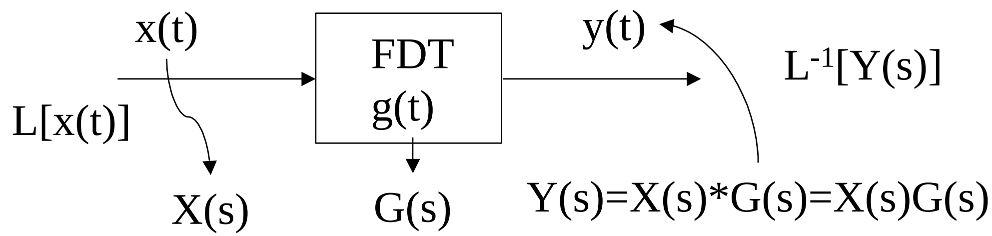


INESTABLE





Respuesta temporal dependiendo de los polos (2/3)

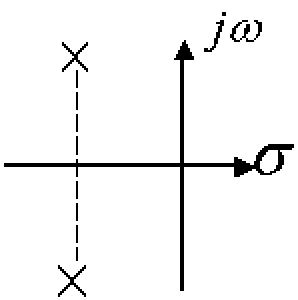


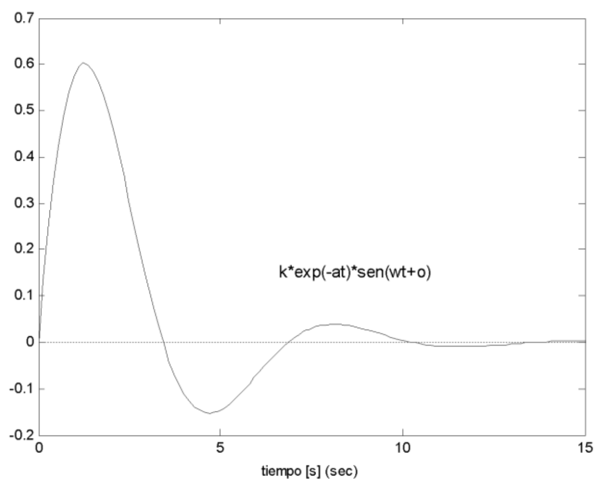
$$Y(s)=\frac{k_1}{s}+\sum_i \frac{k_i}{s+p_i}+\sum_j \frac{k_j s+L_j}{s^2+2\alpha_j s+\omega_{n,j}^{\;2}}$$

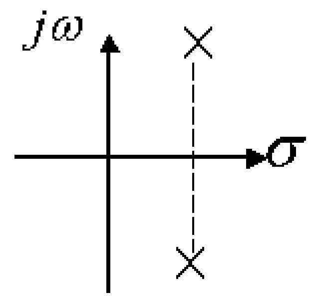
$$y(t)=k_1+\sum_i k_i e^{-p_i t}+\sum_j L_j M_j e^{-\alpha_j t} sen\left(\sqrt{\omega_{n,j}^{\;2}-\alpha_j}\cdot t+\vartheta_j\right)$$

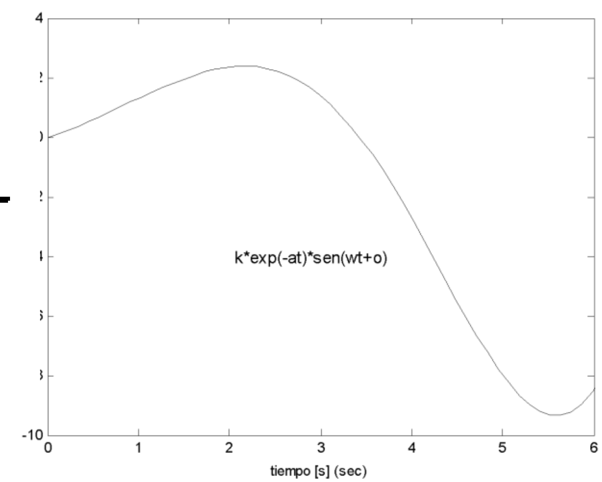
ESTABLE

INESTABLE

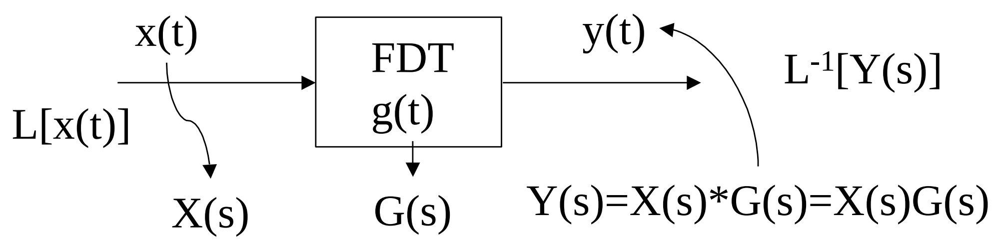








Respuesta temporal dependiendo de los polos (2/3)



$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s+p_i} + \sum_j \frac{k_j s + L_j}{s^2 + 2\alpha_j s + \omega_{n,j}^{\ 2}}$$

$$y(t) = k_1 + \sum_i k_i e^{-p_i t} + \sum_j L_j M_j e^{-\alpha_j t} sen\left(\sqrt{\omega_{n,j}^{\ 2} - \alpha_j} \cdot t + \vartheta_j\right)$$

CRÍTICAMENTE ESTABLE